2.8.21 Důkazy Pythagorovy věty

Předpoklady: 020820

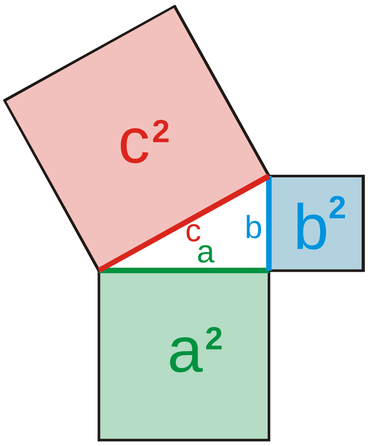
Pedagogická poznámka: V řešení každého příkladu jsou uvedeny rady, které dávám postupně žákům, abych jim pomohl.

Pedagogická poznámka: Diskuse o následujícím příkladu je nutná. Žáci často vůbec nechápou o co v důkazech jde a co v nich mají najít (navíc většině z nich je poměrně vzdálená představa, že by se měli nějakým způsobem přesvědčit, zda jsou informace, které jim někdo předává pravdivé).

Př. 1: Nakresli obrázek pravoúhlého trojúhelníku a doplň ho o grafické znázornění Pythagorovy věty. Co musíš dokázat, abys dokázal Pythagorovu větu?

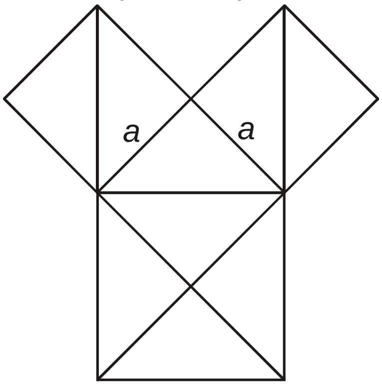
Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami. $\Rightarrow$ Musíme nakreslit obrázek (obrázky), ve kterém (kterých):

- bude pravoúhlý trojúhelník,
- budou čtverce nad jeho odvěsnami a přeponou,
- bude zřejmé, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami, je stejný jako obsah čtverce nad přeponou.



Pedagogická poznámka: U obou následujících příkladů je zcela zásadní, aby žáci dobře překreslili obrázek.

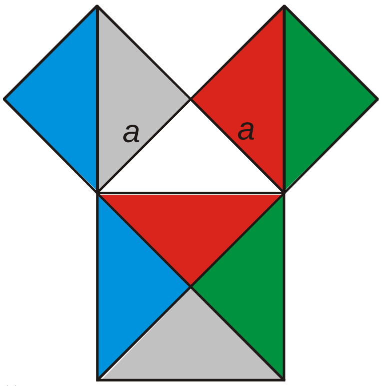
Př. 2: Na obrázku je nakreslen důkaz Pythagorovy věty. Překresli ho do sešitu a dopiš k němu vysvětlivky. Je tento důkaz úplný?



Rady:

- Na obrázku je devět trojúhelníků. Jaké mají speciální vlastnosti?
- Jaký je vztah mezi trojúhelníky na obrázku?
- Z čeho jsou složeny jednotlivé čtverce?

Obrázek se skládá z devíti shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků.

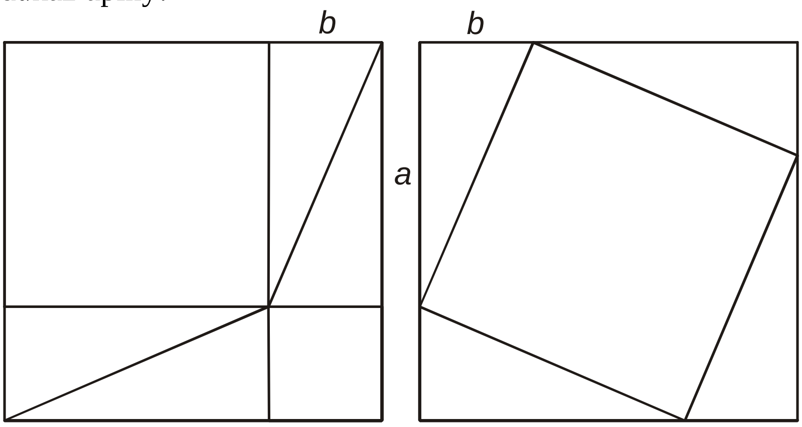


Čtverce nad odvěsnami prostředního bílého trojúhelníku se skládají ze dvou trojúhelníků a těchto trojúhelníků můžeme složit čtverec nad přeponou trojúhelníku. $\Rightarrow$ Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku (čtyři trojúhelníky) je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami (čtyři trojúhelníky).

Uvedený důkaz není úplný, platí jen pro rovnoramenné trojúhelníky (kdyby bílý trojúhelník nebyl rovnoramenný, nebyly by čtverce nad odvěsnami shodné a nešlo by z nich sestavit čtverec nad přeponou).

Pedagogická poznámka: Častou chybou je špatně nakreslený obrázek. Obvykle žáci kreslí prostřední trojúhelník (v řešení bílý) jako tupoúhlý, pak jsou čtverce nad přeponami samozřejmě příliš malé.

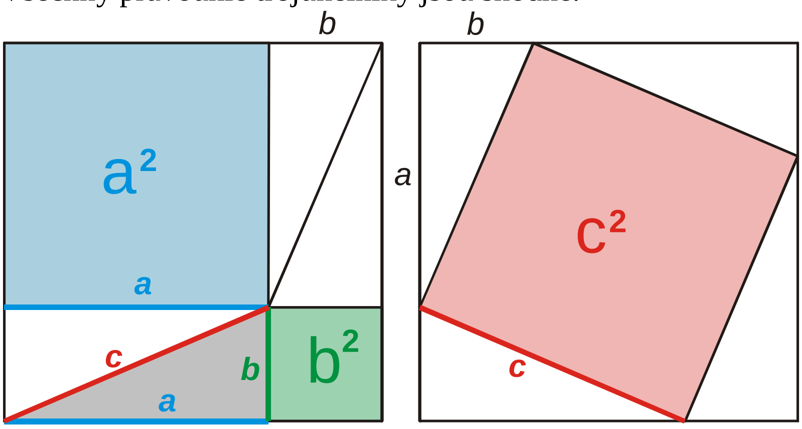
Př. 3: Na obrázku je nakreslen důkaz Pythagory věty pomocí dvou shodných různě rozdělených čtverců. Překresli ho do sešitu a dopiš k němu vysvětlivky. Je tento důkaz úplný?



Rady:

- Co platí pro všechny trojúhelníky?
- Kolik menších nerozdělených čtverců obrázek obsahuje?
- Jak jsou sestaveny oba velké rozdělené čtverce?

Všechny pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné.



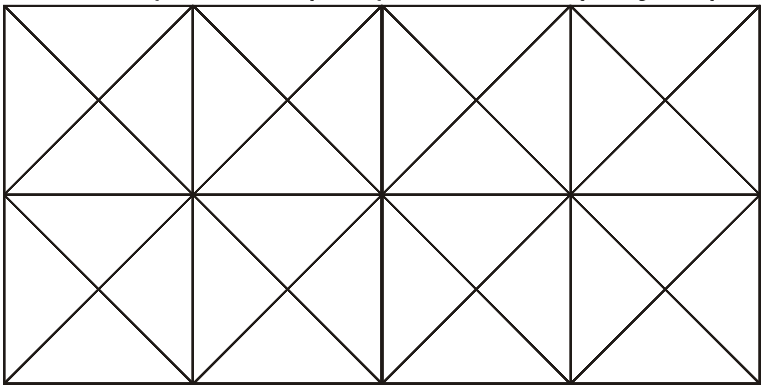
Vnitřní čtverce v levém čtverci odpovídají čtvercům nad odvěsnami libovolného z trojúhelníků, vnitřní čtverec v pravém čtverci odpovídá čtverci na přeponou libovolného z trojúhelníků.
Obsah obou velkých čtverců je shodný, obsah všech trojúhelníků je také shodný a proto se obsah červeného čtverce shoduje se součtem obsahů modrého a zeleného čtverce $\Rightarrow$ Pythagorova věta platí.

Tento důkaz je úplný. Trojúhelníky jsou pravoúhlé, ale nejsou rovnoramenné. Čtverec v pravém obrázku můžeme „otáčet“ a tím měnit tvar pravoúhlého trojúhelníku (a samozřejmě tím měnit i levý obrázek).

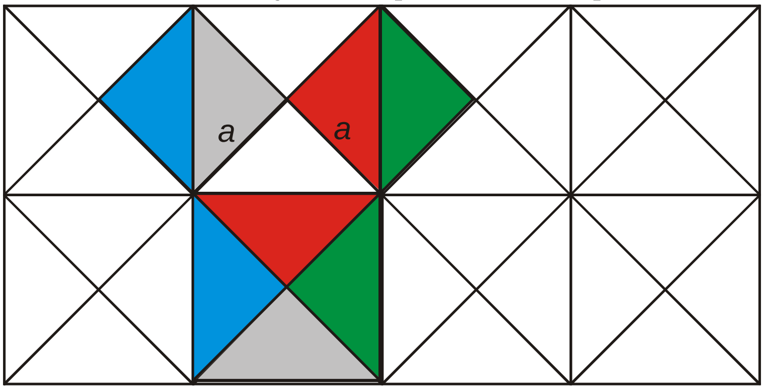
Pedagogická poznámka: První problém vzniká při překreslování obrázků, kde žáci nepřekreslí u pravého obrázku úseky *a*, *b* stejně dlouhé a nezískají tak shodné trojúhelníky.
Při samotném důkazu pak nečiní žákům nalezení rovnosti obsahů $a^2+b^2=c^2$ zdaleka takové problémy jako uvědomění si toho, že čtverce představují čtverce nad odvěsnami a nad přeponou (tedy, že jde o čtverce vystupující v Pythagorově větě).

Na druhou stranu se mi při hodině zdálo, že mnozí do tohoto okamžiku tápající žáci konečně pochopili, o co jde a u dalších důkazů postupovali podstatně jistěji.

Př. 4: Na obrázku je kus dlažby. Najdi v ní důkaz Pythagorovy věty.



V obrázku můžeme vytáhnout první z důkazů pro rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník.

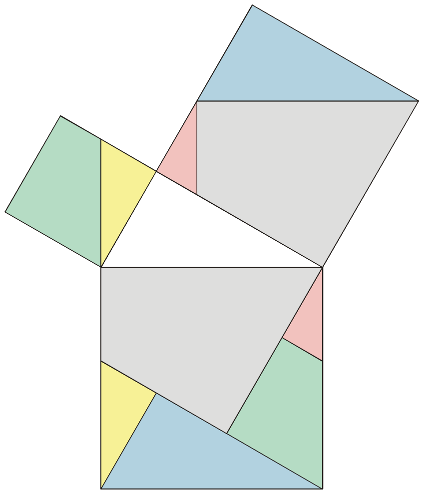


Př. 5: Vezmi si jednu skládačku a dokaž s její pomocí Pythagorovu větu.

Rady:

- Skládej čtverce.
- Bílý trojúhelník se na skládání čtverců nepoužívá.
- Hledej, které strany kousků pasují na strany bílého trojúhelníku.
- Polož skládačku na podložku.

Z kousků skládačky můžeme složit buď dva čtverce nad odvěsnami bílého trojúhelníku nebo jeden čtverec nad jeho přeponou $\Rightarrow$ Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami (Pythagorova věta platí).

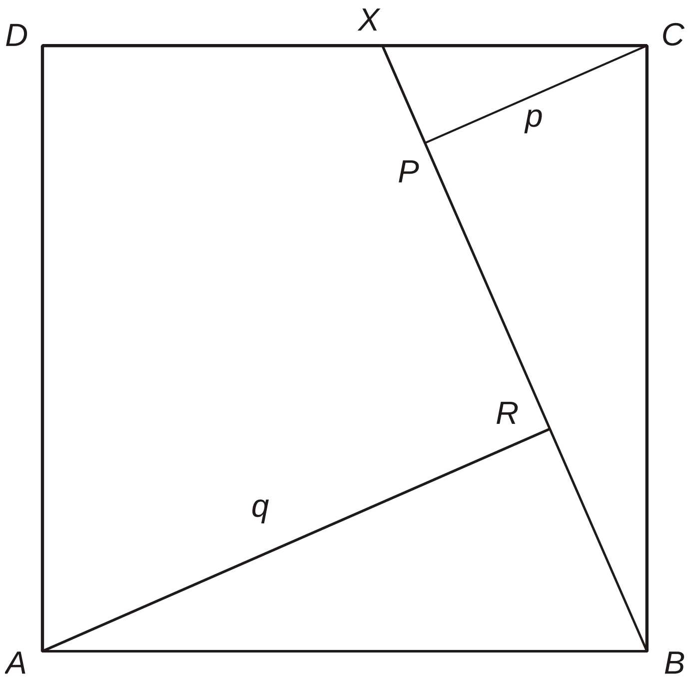


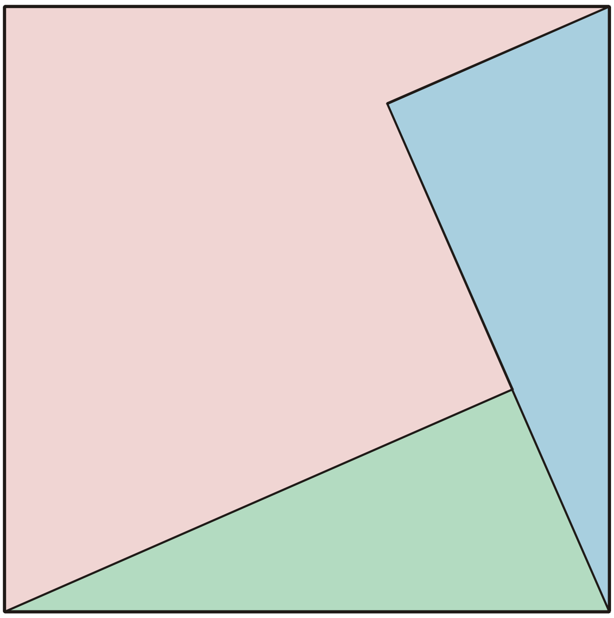
Pedagogická poznámka: Skládačku tisknu na polokartón, podložku na normální papír (obojí je v souboru skládačka).

Př. 6: Narýsuj na volný papír čtverec *ABCD* o straně alespoň 8 cm. Spoj vrchol *B* s libovolným vnitřním bodem *X* strany *CD*. Narýsuj přímku *p*, která je kolmá na úsečku *BX* a prochází bodem *C*. Průsečík této přímky s úsečkou *BX* označ *P*. Narýsuj přímku *q*, která je kolmá na úsečku *BX* a prochází bodem *A*. Průsečík této přímky s úsečkou *BX* značení *R*. Tímto se čtverec *ABCD* rozdělil na trojúhelníky *ABR*, *BCP* a pětiúhelník *ARPCD*. Rozstřihni čtverec na tyto tři útvary. Jejich vhodným přeskládáním získáš důkaz Pythagorovy věty.

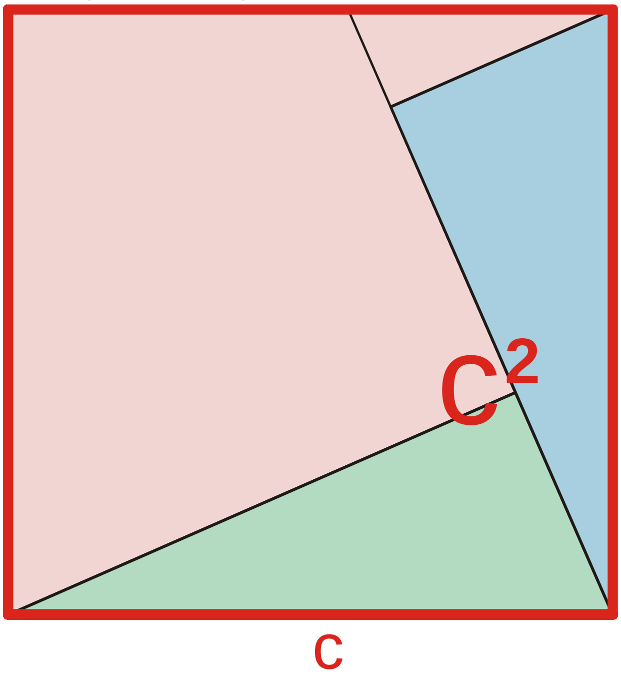
Rady:

- Jaké jsou oba trojúhelníky, které jsi vystřihl?
- Jakou roli hraje čtverec, který jsi rozstříhal?
- Jak dlouhá musí být strana čtverců, které ještě potřebuješ sestavit?

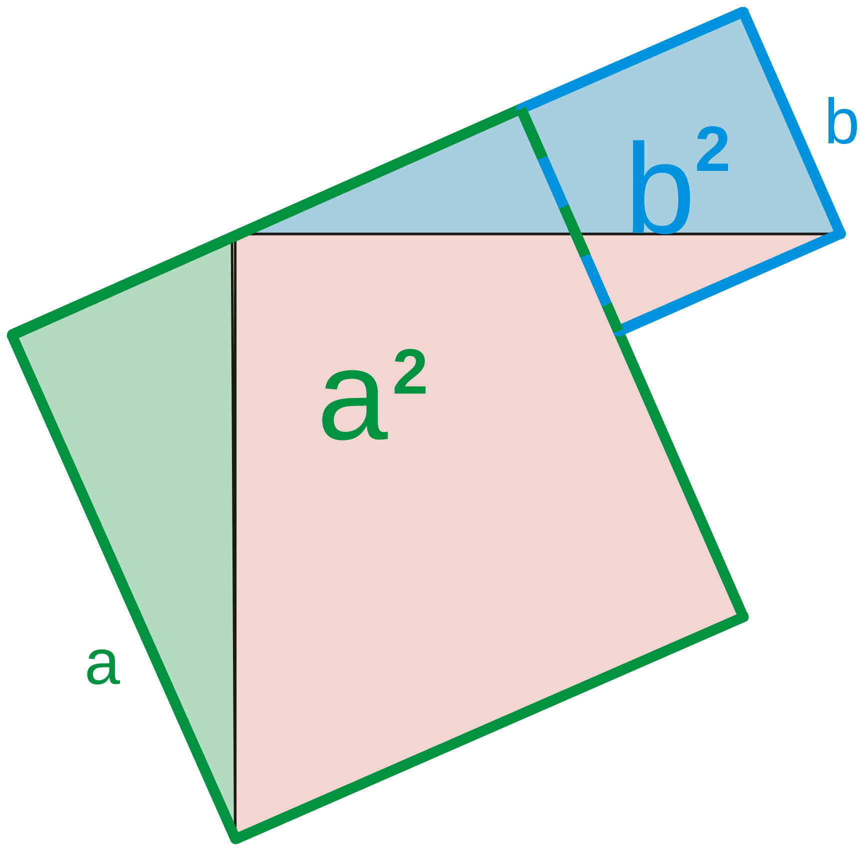




Rozdělením čtverce jsme získali dva shodné pravoúhlé trojúhelníky a pětiúhelník. Strana rozstříhaného čtverce má stejnou délku jako přepony obou shodných trojúhelníků $\Rightarrow$ všechny tří dílky dohromady mají obsah c^2.



Pokud chceme důkaz dokončit, musíme dílky přeskládat tak, aby tvořily dva čtverce (jeden o straně *a* a druhý o straně *b*).



S dílků jsme postavili dva čtverce o obsazích a^2 a b^2. Protože jsou postaveny ze stejných dílků (nepřekrývajících se), mají dohromady stejný obsah jako původní čtverec o obsahu c^2 $\Rightarrow$ Pythagorova věta platí.

Pedagogická poznámka: Rád bych poděkoval Michalu Čučkovi, jehož diplomová práce byla skvělým zdrojem různých důkazů.

Shrnutí: Při důkazech Pythagorovy věty hledáme k pravúhlému trojúhelníky čtverce, o kterých i bez Pythagorovy věty víme, že součet obsahů dvou z nich se rovná obsahu třetího.